数理解析研究所講究録
61巻 1968年 1-24

Function algebras の理論から見た rational approximation

奈良高専　貴志 一男

A を compact Hausdorff space X 上の uniform algebra, $A^\perp$ を $\int_X f d\mu = 0$, $\forall f \in A$ となる X 上の有限複素数値 Baire measures の全体とする。このとき,

$$f \in A \Longleftrightarrow \int_X f d\mu = 0, \quad \forall \mu \in A^\perp$$

であり, また二つの uniform algebras A, B $(A \subseteq B)$ について

$$A = B \Longleftrightarrow A^\perp = B^\perp$$

となる。このような functional analysis の理論を rational approximation の問題に応用して, 例えば Mergelyan の定理の証明の簡単化など, いろいろ研究がなされている。ここでは, この方面の一つの話題として, Bishop の局所化定理について述べる。続いて $R(X)$ (定義は §1) の Gleason part について, [9, 21, 22] を中心として最近の話題を述べる。

§1 例

Xを複素平面$\mathbb{C}$上のcompactな部分集合とする．Xのtopological boundaryを∂Xとし，$X^\circ = X \setminus \partial X$とおく．

$C(X)$；X上の連続な複素数値関数の全体からなり，uniform topologyをもったalgebraとする．

$C^*(X)$；X上の有限複素数値Baire measuresの全体で，$C(X)$の共役空間と同一視する．

$P(X)$；多項式の全体P_0の$C(X)$によるclosure．すなわち$\overline{P_0|X} = P(X)$．関数fのXへの制限を$f|_X$で表わす．

$R_0(X)$；X上に極をもたない有理関数の全体．

$R(X)$；$R_0(X)$の$C(X)$によるclosure，すなわち$\overline{R_0(X)|X}$.

$H(X^\circ)$；X°で一価正則な関数の全体．

$A(X) = C(X) \cap H(X^\circ)$

次のRungeの定理はよく知られている．

UをXのある近傍とする．
$f \in H(U) \Rightarrow f|_X \in R(X)$

さて，容易に分かるように，

$$P(X) \subseteqq R(X) \subseteqq A(X) \subseteqq C(X)$$

となる．これらの間の関係を問題にする．

例1. $P(X) = C(X) \Leftrightarrow X^\circ = \phi$ でかつ $\mathbb{C}\setminus X$ は connected である.
これは Weierstrass の定理の拡張で, M. A. Lavrentieff [1936] によって証明された. functional analysis を使った証明としては, 例えば [19].

例2. $P(X) = A(X) \Leftrightarrow \mathbb{C}\setminus X$ は connected である.
これは Mergelyan の定理である. [17] functional analysis を使った証明は, [10], [16], [20] にある.

例3. $P(X) = R(X) \Leftrightarrow \mathbb{C}\setminus X$ は connected である.

例4. $A(X) = C(X) \Leftrightarrow X^\circ = \phi$.

問題1. $R(X) = A(X)$ であるための必要十分な X の幾何的性質は何か.

問題2. $R(X) = C(X)$ であるための必要十分な X の幾何的性質は何か.

これらはまだ完全に解けていないようである.

問題1について. Mergelyan は次の事を証明している. [17]

例4. $\mathbb{C}\setminus X$ は有限個の components からなるとき, $R(X) = A(X)$ となる.

Vitushkin によって, $R(X) = A(X)$ になるための必要十分

i

な条件は，analytic capacity の概念を用いて，得られている．これから $R(X)=A(X)$ であるための X の幾何的性質がかなりよく分ってきているようである．[18]

<u>問題2について</u>．　Bishop は次の事を証明した．[6]

$R(X)=C(X) \Leftrightarrow X$ の各点は $R(X)$ の peak point である．(定義は後述)　$R(X)=C(X)$ ならば $X^\circ=\phi$ である．この逆は成り立たない例として，次の Mergelyan の Swiss Cheese は有名である．

例5．$D=\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z|\leqq 1\}$ の closure $\overline{D}$ から次の条件を満足する open discs Δ_n の列を取り去る．

1) $\overline{\Delta_n}\subset D$，

2) $\overline{\Delta_n}\cap\overline{\Delta_m}=\phi$ for $n\neq m$．

3) $X=\overline{D}-\bigcup_{n=1}^{\infty}\Delta_n$ は内点を持たない．

4) Δ_n の半径を r_n とするとき，$\sum_{n=1}^{\infty} r_n<\infty$．

このとき，X を Mergelyan の Swiss cheese という．

さて，$R(X)\neq C(X)$ となること．

証明．X 上の measure μ をつぎのように定義する．

i) 内部に関して正の向きに方向づけた $\partial D:|z|=1$ の上で $\mu=dz$．

ii) 各 n について外部に関して正の向きに方向づけた $\partial\Delta_n$ の上で $\mu=dz$．

iii) ∂D，$\partial\Delta_n\,(\forall n)$ 以外の X 上では $\mu=0$．

すると，μ は X 上の有限な measure であり，$\forall r \in R_0(X)$ のとき Cauchy の定理から

$$\int_X r\,d\mu = \int_{\partial D} r\,dz + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\partial \Delta_n} r\,dz = 0$$

$$\therefore \int_X f\,d\mu = 0, \quad \forall f \in R(X).$$

一方，$\mu \neq 0$ より $\exists g \in C(X)$, $\int_X g\,d\mu \neq 0$. $\quad \therefore R(X) \subsetneqq C(X)$ //

次のような例もある．

$X = \overline{X^\circ}$, X° は simply connected であるが，$R(X) \neq A(X)$ である．[18]

Bishop は始めて functional analysis の方法を rational approximation に応用した．[5, 6, 7] Glicksberg and Wermer は Bishop の議論で残っていた関数論を取り去り，Dirichlet algebra の一般論を使って，例2を証明した．そのとき関数論で必要になった事は，"∂X の任意の実連続関数は，調和多項式によって，∂X 上で一様に近似出来る．"（Walsh の定理）だけである．[15, 21] この考え方に添って，例4も証明されている．[2, 11, 12, 15]

一方 Carleson は例2を出来るだけ関数論を使わないで，また Dirichlet algebra の理論を使うことも避けて，証明した．

この流れに添う Bishop の局所化定理を次に述べる [10,12,18]

§2 Bishop の局所化定理

X を複素平面 $\mathbb{C}$ 上の Compact 部分空間とする．$\mu \in C^*(X)$ に対して

$$\hat{\mu}(z) = \int_X \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}, \quad \tilde{\mu}(z) = \int_X \frac{d|\mu|(\zeta)}{|\zeta - z|} \quad (|\mu| \text{ は } \mu \text{ の total variation})$$

とおくと，$|\hat{\mu}(z)| \leqq \tilde{\mu}(z)$．次の補題は Bishop [6] にある．

補題 2.1　1)　$\tilde{\mu}(z) < \infty$　a.e.-$d\lambda$

2)　$\hat{\mu}(z) = 0$ a.e.-$d\lambda \iff \mu = 0$

λ は平面上の Lebesgue measure．

1) の証明．$X \subset \{\zeta \in \mathbb{C} ;\ |\zeta| < R\}$ とする．

i) $|z| \leqq R$ のとき，$|\zeta| \leqq R$ ならば

$$\iint_{|z| \leqq R} \frac{dx\,dy}{|\zeta - z|} = \iint_{|z' - \zeta| \leqq R} \frac{dx'\,dy'}{|z'|} \leqq \iint_{|z'| \leqq 2R} \frac{dx'\,dy'}{|z'|} = 4\pi R$$

よって，

$$\iint_{|z| \leqq R} \left\{ \int_X \frac{d|\mu|(\zeta)}{|\zeta - z|} \right\} dx\,dy = \int_X d|\mu|(\zeta) \iint_{|z| \leqq R} \frac{dx\,dy}{|\zeta - z|} \leqq 4\pi R \int_X d|\mu| < \infty$$

$$\therefore \ \tilde{\mu}(z) < \infty \quad \text{a.e.-}d\lambda \quad \text{for } z \in \{|z| \leqq R\}$$

ii) $|z| > R$ のとき．$\zeta \in X$ に対して $|\zeta - z| \neq 0$．

$\therefore \ \tilde{\mu}(z) < \infty$．

2) の証明　X を含む compact 集合 X' に台 (support) をもつ，連続的微分可能な関数を g とする．Green の定理から

$$g(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<\infty} \frac{\bar\partial g(\zeta)}{\zeta - z}\,dx\,dy\ , \qquad \zeta = x+iy$$
$$\bar\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

となる．

$$\int_X g(z)\,d\mu = \frac{1}{\pi}\iint \bar\partial g(\zeta)\cdot\hat\mu(\zeta)\,dx\,dy = 0$$

$$\left(\because \quad \int_X \left\{\iint |\bar\partial g(\zeta)|\cdot\frac{1}{|\zeta - z|}\,dx\,dy\right\} d|\mu|(z) < \infty \right)$$

X 上の任意の連続関数は上のような関数 g によって，X 上で一様に近似出来るから

$$\int_X g\,d\mu = 0, \quad \forall g \in C(X)$$
$$\therefore \quad \mu = 0 .$$

//

> 補題 2.2　$\cdot\ \mu \in C^*(X)$ とする．
>
> $$\mu \perp R(X) \Longleftrightarrow \hat\mu(z) = 0 \quad \text{on} \quad \mathbb{C} - X$$

証明 ($\Longleftarrow$)　$\mu \perp (\zeta - z)^{-1}$ for $\forall z \in \mathbb{C} - X$．従って，$r(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\zeta - z_k}$，$z_k \in \mathbb{C} - X$ ならば $\mu \perp r(\zeta)$．$R(X)$ の任意の関数 f は上のような関数 $r(\zeta)$ によって一様に近似出来るから $\mu \perp R(X)$．

3

補題 2.3 $\mu \in C^*(X)$, φ を compact な台 K をもつ C^∞ 級関数とすると

$$\varphi\hat{\mu} = \widehat{\varphi\mu} + \hat{\sigma}, \quad \text{ただし } \sigma = -\frac{1}{\pi}\bar{\partial}\varphi(\zeta)\hat{\mu}(\zeta)\,dx\,dy, \ \zeta = x+iy.$$

証略. [18]

定理 2.4 (Bishop の局所化定理)
$f \in C(X)$ とする. X の各点 z に, (X における) 閉近傍 U_z が存在して, $f|_{U_z} \in R(U_z)$ ならば, $f \in R(X)$.

証明. $\forall\mu \in R^\perp(X)$ に対して, $f \perp \mu$ を云う. $X \ni z$ に対して, $K_z = \{\zeta ; |\zeta - z| \leqq \varepsilon_z\}$, $K_z \cap X \subseteqq U_z$ となる K_z が存在する. X は compact 集合であるから, 有限個の $K_{z_1}, \cdots K_{z_n}$ を選び

$$\bigcup_{j=1}^{n} K_{z_j} \supset X$$

とすることが出来る. $K_{z_j} = K_j$, $U_{z_j} = U_j$ とおく. 次のような関数を取る.

$$\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{C}), \quad j = 1, 2, \cdots, n$$
$$0 \leqq \varphi_j \leqq 1, \quad \varphi_j = 0 \ \text{ on } \ \mathbb{C} - K_j$$
$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(z) = 1 \quad \text{on } X.$$

さて,

$$\nu_j = \varphi_j\mu - \frac{1}{\pi}\bar{\partial}\varphi_j(\zeta)\hat{\mu}(\zeta)\,dx\,dy \qquad (\zeta = x+iy)$$

とおく. 補題 2.2 より ν_j の台は U_j に含まれる. 補題 3 より $\hat{\nu}_j = \widehat{\varphi_j\mu} + (\varphi_j\hat{\mu} - \widehat{\varphi_j\mu}) = \varphi_j\hat{\mu}$.

$\therefore \hat{\nu}_j = 0$ on $\mathbb{C} - U_j$.

よって，$\nu_j \perp R(U_j)$. 仮定より $\nu_j \perp f$ (ν_j). →

$\mu = \sum \nu_j$ であるから，$\mu \perp f$.

> 定理 2.5 $\mathbb{C} \setminus X$ のすべての components の直径がある正数 ε_0 より大きいときは $R(X) = A(X)$

証明. X の各点 z に対して，(X における) 閉近傍を，U_z の直径が ε_0 より小になるようにとると，$\mathbb{C} - U_z$ は connected になる. よって，Mergelyan の定理 (§1. 例2) より $R(U_x) = A(U_x)$.

${}^\forall f \in A(X)$ とすると $f|_{U_x} \in A(U_x) = R(U_x)$. 定理 2.4 より $f \in R(X)$. $\therefore R(X) = A(X)$. //

> 定理 2.6 $\mathbb{C} \setminus X$ は有限個の components からなるとき $R(X) = A(X)$. (Mergelyan の定理)

同じ方法を用いて，Garnett は次の事を証明している.

> 定理 2.7.
>
> $\Gamma_0 = \{x \in X$; x の任意の近傍は $\mathbb{C} \setminus X$ の無限個の Components と交わる$\}$. 若し Γ_0 は可附番個の集合であるならば，$R(X) = A(X)$ である.

§3 Maximal ideal space と peak points

I) X を compact Hausdorff space. A を X 上の uniform algebra, すなわち A は $C(X)$ の closed subalgebra で constants を含み, X の点を separates する. §1 の $A(X)$, $P(X)$, $R(X)$ 等は uniform algebras である. $\mathfrak{M}(A)$ を A の零でない complex homomorphisms の全体に Gelfand topology を入れた space, すなわち A の maximal ideal space とする. X の点 x は, $\varphi_x(f)=f(x)$ (x における evaluation) によって, $X\subset\mathfrak{M}(A)$ と考えられ, 更に map : $x\to\varphi_x$ は X から $\mathfrak{M}(A)$ の中への homeomorphism である事も分るので, X を $\mathfrak{M}(A)$ の compact subset と看做す. $\varphi\in\mathfrak{M}(A)$ のとき

$$(*)\qquad \varphi(f)=\int_X f\,dm\ ,\quad {}^\forall f\in A$$

となる乗法的確率 measure m が存在する. このような m を φ の表現 measure と呼び, φ の表現 measures の全体を $M_\varphi(A)$ または M_φ と書くことにする. また, $(*)$ を満足する有限複素 Baire measure を複素表現 measure という. 以下 $\varphi(f)$ の事を $f(\varphi)$ と書く.

例えば, $R(X)$ の maximal ideal space は X である. (∵) $X\subseteqq\mathfrak{M}(R(X))$ であり, ${}^\forall\varphi\in\mathfrak{M}(R(X))$ とすると $\varphi(z)=a\in X$ となる事は背理法から容易に分る). よって, X は複素平面 $\mathbb{C}$ の compact 部分空間と考えても, $R(X)$ の

maximal ideal space と考えても同じ事である。$\mathbb{C}-X$ が connected のとき（§1, 例2），$\mathfrak{M}(P(X))=X$．一般の $P(X)$ のとき $\mathfrak{M}(P(X))=\{\zeta\in\mathbb{C}\,;\ |p(\zeta)|\leq \max_{z\in X}|p(z)|,\ \forall p\in P_0\}$．[1] それから，$\mathfrak{M}(A(X))=X$ である事も知られている．[3]

$\varphi_1,\ \varphi_2\in\mathfrak{M}(A)$ に対して，

$$\|\varphi_1-\varphi_2\|=\sup\{|f(\varphi_1)-f(\varphi_2)|\ ;\ f\in A,\ \|f\|\leq 1\},\quad \|f\|=\sup_{x\in X}|f(x)|$$

とおき，$\|\varphi_1-\varphi_2\|<2$ のとき $\varphi_1\sim\varphi_2$ と書く．$\sim$ は同値関係を満足する．（Gleason）

$$\Sigma(\varphi)=\{\varphi'\in\mathfrak{M}(A)\ ;\ \varphi\sim\varphi'\}$$

を φ を通る（Gleason）part と呼ぶ。若し，$\Sigma(\varphi)=\{\varphi\}$ のときは，$\Sigma(\varphi)$ は trivial part であると云い，$\Sigma(\varphi)\neq\{\varphi\}$ のときは nontrivial part であるという．

同じ part に属する条件はいろいろあるが，あとで必要となるものを述べる．[8]

定理 3.1　次の事は同値である。

(1) $\varphi_1\sim\varphi_2$

(2) φ_1,φ_2 は互いに絶対連続な表現 measure を持つ。

(3) φ_1,φ_2 は互いに singular でない表現 measure を持つ。

Ⅱ) X を compact metrizable space とする．[4, 6, 18]
x が X 上の uniform algebra A の peak point であるとは

$$|f(y)| < |f(x)| = \|f\| \quad \text{for } {}^{\forall}y \in X - \{x\},$$

を満足する $f \in A$ が存在する事である．A の peak points の全体を $P(A)$ または P で表わす．

定理 3.2　次の事は同値である．

(1) x は A の peak point である．

(2) $x \in \mathfrak{M}(A)$ の表現 measure は一意的である．すなわち
$M_x(A) = \{\delta_x\}$，δ_x は Dirac measure．

注) (2) を満足するような点の全体を，A の Choquet boundary という．

定理 3.3

(1) P は G_δ 集合である

(2) $\varphi \in \mathfrak{M}(A)$ のとき，$m(X - P) = 0$ となる $m \in M_\varphi(A)$ が存在する．

$S(f) = \{x \in X \ ; \ |f(x)| = \|f\|\}$ とおく．X の部分集合 N が，$N \cap S(f) \neq \phi$，${}^{\forall}f \in A$ を満足するとき，N を A の boundary という．上のような N の中で最小の M (必ずしも閉ではない) が存在するとき，M を A の minimal boundary と云う．A の closed な最小の boundary を A の Šilov boundary と云って，∂A で表わす．

定理 3.4　A の minimal boundary は存在して、それは A の peak points の全体 P に等しい。したがって、A の Šilov boundary は P の closure である。

$A_R = \{\mathrm{Re} f : f \in A\}$,　$C_R(X) = \{\mathrm{Re} f : f \in C(X)\}$ とおく。A_R が $C_R(X)$ で (uniform topology で) dense であるとき、uniform algebra A は Dirichlet algebra であるという。

定理 3.5　A が Dirichlet algebra のとき、$P = X = \partial A$ である。

例えば、$R(X)$ を考える。∂X を X の topological boundary とする。$R(X)$ の peak points の全体は、∂X 上で dense であって、∂X は $R(X)$ の Šilov boundary である。よって restriction map

$$f \to f|_{\partial X}, \quad \forall f \in R(X)$$

を考えると、これによって $R(X)$ を $C(\partial X)$ の subalgebra に isomorphic, isometric に埋めこむ事が出来る。

$\mathbb{C} - X$ が connected のとき、$P(X) = A(X)$ (§1, 例2) であるが、∂X 上で考えるとき、$P(X)$ は Dirichlet algebra である。よって、$\partial X = P = \partial(P(X))$.
(勿論、X 上の $P(X)$ と考えても $\partial X = P = \partial(P(X))$).

また、∂X は丁度 $\mathbb{C} - X$ の components の boundaries の和になるとき、∂X の各点は $R(X)$ の peak points である。

11

§4 R(X) の parts.

$R(X)$ の peak point は trivial part であることは容易に分かる.

例 1. $\mathbb{C}\setminus X$ は connected のとき (§1. 例 2), $P(X)$ の parts は次のようになっている.

1) ∂X の各点は trivial part である.

2) $X^\circ (= X - \partial X)$ の各 component は一つの nontrivial part である. [20]

例 2. $\mathbb{C}\setminus X$ は有限個の components からなるとき, $R(X)$ の part は例 1 と同じである. すなわち

1) ∂X の各点は trivial part である.

2) X° の各 component は一つの nontrivial part である. [1].

上の例では,

a) peak point = trivial part.

b) nontrivial part の平面上の Lebesgue measure は positive である.

c) nontrivial part は connected である.

d) G を一つの nontrivial part とすると, $\overline{G}\setminus G$ は peak points からなる.

上記の事は, 任意の $R(X)$ の part について成り立つが,

a), b) は Wilken によって肯定的に解決され(以下述べる) c) は未解決 (cf. 系 4.8), d) については, nontrivial part Σ は dense conneted open set を部分集合として含んでいるならば, 成り立つ事が分っている. [22]

定理 4.1 $\mu(\in C^*(X))$ を $z_0\in X=m(R(X))$ の複素表現 measure とする. このとき, $\lvert\mu\rvert$ に関して絶対連続な z_0 の表現 measure m が存在する. (Hoffman - Rossi の定理)

証明 (Sarason. [22]) 空間 $L^2(\lvert\mu\rvert)$ における algebra $R(X)$ の closure を H^2 とする. また $I=\{f\in R(X);\ f(z_0)=0\}$ の $L^2(\lvert\mu\rvert)$ による closure を H_0^2 とおくと, $H_0^2=\{f\in H^2:\ \int f d\mu=0\}$ となる. いま, $h\in H^2$ を

$$\|h\|_2=1,\quad h\perp H_0^2$$

となるようにとり, $dm=\lvert h\rvert^2 d\lvert\mu\rvert$ とおくと, $m\ll\lvert\mu\rvert$ で, $m\in M_{z_0}$. (注. $m\ll\lvert\mu\rvert$ は m が $\lvert\mu\rvert$ に関して絶対連続であることを表わす) 上記の定理は, 次の論文による.

K. Hoffman and H. Rossi; On the extension of positive weak* continuous functionals. T. A. M. S. 116 (1965).

補題 4.2 $\mu\perp R(X)$ とする. $\tilde{\mu}(z_0)<\infty$, $\hat{\mu}(z_0)\neq 0$ ならば, $\nu_{z_0}=\dfrac{1}{\hat{\mu}(z_0)}\cdot\dfrac{\mu}{\zeta-z_0}$ は z_0 の複素表現 measure である.

証明 $r\in R_0(X)$ とすると, $\dfrac{r(\zeta)-r(z_0)}{\zeta-z_0}=F(\zeta)\in R_0(X)$.

$\tilde{\mu}(z_0) < \infty$ より

$$0 = \int \frac{r(\zeta) - r(z_0)}{\zeta - z_0} d\mu(\zeta) = \int \frac{r(\zeta)}{\zeta - z_0} d\mu(\zeta) - r(z_0)\hat{\mu}(z_0).$$

一様極限をとることによって,

$$f(z_0) = \int f(\zeta)\, d\nu_{z_0}(\zeta), \quad \forall f \in R(X). \quad //$$

定理 4.3 $\mu \perp R(X)$ とする. もし μ はすべての表現 measure に関して singular (このような μ を completely singular measure という) ならば, $\mu = 0$. (Wilken)

証明. $\mu \neq 0$ とする. 補題 2.1 より, ある $z_0 \in X$ が存在して,

$$\tilde{\mu}(z_0) < \infty, \quad \hat{\mu}(z_0) \neq 0.$$

補題 4.2 より,

$$\nu_{z_0} = \frac{1}{\hat{\mu}(z_0)} \cdot \frac{\mu}{\zeta - z_0}$$

は z_0 の複素表現 measure である. よって,

$$\exists m \in M_{z_0}, \quad m \ll |\mu|. \quad \text{仮定に反する.} \quad //$$

定理 4.4 z_0 が $R(X)$ の peak point でないならば, z_0 を通る part を $\Sigma(z_0)$ とすると, $\lambda(\Sigma(z_0)) > 0$. ここに, λ は平面上の Lebesgue measure を表わす. (Wilken)

証明. 定理 3.2 より, $\exists m \in M_{z_0}$, $m \neq \delta_{z_0}$.

$\mu = (\zeta - z_0)m$ とおくと, $\mu \neq 0$, $\mu \perp R(X)$.

$$Q = \{\zeta \in \mathbb{C} : \tilde{\mu}(\zeta) < \infty \text{ and } \hat{\mu}(\zeta) \neq 0\}$$

とおくと，補題 2.2 より

$$Q \subset X.$$

補題 2.1 より

$$\lambda(Q) > 0.$$

$^\forall s \in Q$ とするとき，

$$\nu_s = \frac{1}{\hat{\mu}(s)} \cdot \frac{\mu}{z-s}$$

は s の複素表現 measure であるから，定理 4.1 より

$$\exists m_s \in M_s, \quad m_s \ll |\mu|.$$

一方，$|\mu| \ll m$ であるから，$m_s \ll m$. 定理 3.1 より

$s \sim z_0$. $\therefore Q \subset \Sigma(z_0)$ $\therefore \lambda(\Sigma(z_0)) > 0$. //

系 4.5. $z \in P(R(X)) \Leftrightarrow \Sigma(z) = \{z\}$

系 4.6 $\Sigma(z) = \{z\}$ for $^\forall z \in X \Leftrightarrow R(X) = C(X)$

これは，次の Bishop の定理 [6] から従う．

$$\underline{\lambda(X - P) = 0 \Rightarrow R(X) = C(X)}$$

証明 $\mu \perp R(X)$ から $\mu = 0$ を証明すればよい．

$\mu \neq 0$ とする．補題 2.2 より $\hat{\mu} = 0$ on $\mathbb{C} \setminus X$. よって，

$$\hat{\mu} \neq 0 \text{ on } {}^\exists S \subset X, \quad \lambda(S) > 0.$$

補題 2.1 と仮定から，$\exists z_0 \in P$, $\hat{\mu}(z_0) \neq 0$, $\tilde{\mu}(z_0) < \infty$.

補題 4.2 より $\displaystyle\int \frac{f(s)}{s - z_0} d\mu = f(z_0)\hat{\mu}(z_0), \quad {}^\forall f \in R(X).$

z_0 で peak する $R(X)$ の関数 を $g(z)$ として

$$|g(z)| < g(z_0) = \|g\| = 1 \quad , \forall z \in X - \{z_0\}$$

とする．そうすると，

$$\int \frac{g^k(\zeta)}{\zeta - z_0} d\mu(\zeta) = \hat{\mu}(z_0)$$

一方 $\tilde{\mu}(z_0) < \infty$ であるから $|\mu|(z_0) = 0$

$$\therefore \quad \frac{g^k(\zeta)}{\zeta - z_0} \to 0 \quad \text{a.e.} - d|\mu|$$

また
$$\left|\frac{g^k(\zeta)}{\zeta - z_0}\right| \leqq \frac{1}{|\zeta - z_0|} \in L^1(d|\mu|)$$

$$\therefore \quad 0 = \hat{\mu}(z_0) \qquad \text{矛盾} \quad //$$

maximal ideal space $\mathfrak{M}$ をもった uniform algebra に対して，$\mathfrak{M}$ の各点が trivial part ならば，$A = C(\mathfrak{M})$ が，上記の系は，この事の成り立つ一つの例である．

Bishop の定理の系として，Hartogs－Rosenthal の定理 が従う．すなわち

$$\lambda(X) = 0 \implies R(X) = C(X)$$

定理 4.7　$\forall z_0 \in X$，$\forall m \in M_{z_0}(R(X))$，$m$ の台を S，z_0 を通る part を Σ とすると

1) $m \in M_{z_0}(R(\overline{\Sigma}))$

2) $S \subset \overline{\Sigma}$ 　　　　(Wilken)

証明　$\mu = (\zeta - z_0)m$ とおくと $\mu \perp R(X)$．定理 4.4 の証明のときと同様に

$$Q = \{ \zeta \in \mathbb{C} \ ; \ \tilde{\mu}(\zeta) < \infty \ \text{and} \ \hat{\mu}(\zeta) \neq 0 \} \subset \Sigma .$$

よって， $\zeta \in U = \mathbb{C} - \overline{\Sigma}$ で， $\tilde{\mu}(\zeta) < \infty$ ならば $\hat{\mu}(\zeta) = 0$.

ところが，補題 2.1 より $\tilde{\mu}(\zeta) < \infty$, a.e.$-d\lambda$.

$$\therefore \ \hat{\mu}(\zeta) = 0 \quad \text{a.e.} -d\lambda \quad \text{on} \quad U$$

このとき，補題2.2 — 2) の証明と同様にして，

$$|\mu|(U) = 0 \qquad \therefore \ \mu \text{ の support} \subset X \backslash U .$$

一方， $\mu \perp R(X)$ より $\hat{\mu} = 0$ on $\mathbb{C} \backslash X$.

$$\therefore \ \hat{\mu} = 0 \quad \text{a.e.} -d\lambda \quad \text{on} \quad \mathbb{C} \backslash (X \backslash U)$$

$$\therefore \ \mu \perp R(X \backslash U) \qquad \therefore \ \mu \perp R(\overline{\Sigma}) .$$

$r \in R_0(\overline{\Sigma})$ とすると，

$$\frac{r(\zeta) - r(z_0)}{\zeta - z_0} = f(\zeta) \in R_0(\overline{\Sigma})$$

$$\therefore \quad 0 = \int \frac{r(\zeta) - r(z_0)}{\zeta - z_0} d\mu = \int [r(\zeta) - r(z_0)] \, dm(\zeta)$$

$$\therefore \ r(z_0) = \int r(\zeta) \, dm(\zeta)$$

$$\therefore \ f(z_0) = \int f(\zeta) \, dm(\zeta) \quad , \ \forall f \in R(\overline{\Sigma})$$

従って， $m(\overline{\Sigma}) = 1$ $\quad \therefore \quad S \subset \overline{\Sigma}$.

系 4.8 $R(X)$ の一つの part を Σ とすると， $\overline{\Sigma}$ は connected である.

証明. $\overline{\Sigma} = A \cup B$, $A \cap B = \phi$, A, B を閉集合とする.

いま， A の特性関数を χ_A とすると， $\chi_A \in R(\overline{\Sigma})$. $\forall z_0 \in \Sigma \cap A$, $\forall m \in M_{z_0}(R(X))$ とすると，定理から $m \in M_{z_0}(R(\overline{\Sigma}))$ と

なって, m の台は A 上にある. 同様に, $\forall z_1 \in \Sigma \cap B$, $\forall m_1 \in M_{z_1}(R(X))$ としても, m_1 の台は B 上にある. ゆえに, m と m' とは互いに singular になるから, z_0 と z_1 とは異なる part に属する. //

定理 4.4 (Wilken の定理) から

$$z_0 \notin P(R(X)), \quad \Sigma_2(z_0) = \{\zeta \in X : \|\zeta - z_0\| < 2\}$$

ならば, $\lambda(\Sigma_2(z_0)) > 0$. いま

$$z_0 \notin P, \ \Sigma_\varepsilon(z_0) = \{\zeta \in X : \|\zeta - z_0\| < \varepsilon\}, \quad 0 < \forall\varepsilon \leqq 2$$

ならば

$$\lambda(\Sigma_\varepsilon(z_0)) > 0$$

となるが, これについて, A. Browder は次の結果を得ている.

$$\Delta_n = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z_0| \leqq \frac{1}{n}\}$$

とする.

> 定理 4.9 $z_0 \notin P(R(X))$ ならば, $0 < \forall\varepsilon \leqq 2$ のとき,
>
> $$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(\Sigma_\varepsilon(z_0) \cap \Delta_n)}{\lambda(\Delta_n)} = 1$$

よって

> 系 4.10 $z_0 \notin P \Rightarrow \lambda(\Sigma_\varepsilon(z_0)) > 0$, $0 < \forall\varepsilon \leqq 2$

$z_0 \in X$ における $R(X)$ の point derivation とは

$$D(fg) = f(z_0)\,Dg + g(z_0)\,Df \quad \forall f, g \in R(X)$$

を満足する $R(X)$ の（必ずしも連続でない） linear functional と定義する．

$$I_{z_0}=\{f\in R(X)\ ;\ f(z_0)=0\}\ ,\quad I_{z_0}^2=\{\sum_{i=1}^{n}f_ig_i\ ;\ f_i, g_i\in I_{z_0},\ i=1,2,\dots,n\}$$

とおくと， z_0 において nonzero な point derivation が存在する事と， $I_{z_0}\neq I_{z_0}^2$ とは同値である． 次の事が成り立つ（ A. Browder ）

定理 4. 11　　$z_0\in P(R(X)) \Longleftrightarrow I_{z_0}=I_{z_0}^2$

従って，

系　4. 12　　$R(X)=C(X) \Longleftrightarrow I_z=I_z^2 \quad \forall z\in X$

以上から次の事が従う．

次の命題は同値である．

1) z_0 は $R(X)$ の peak point である．

2) z_0 は $R(X)$ の Choquet boundary point である．

3) $\sum(z_0)=\{z_0\}$

4) $I_{z_0}=I_{z_0}^2$

文献

1. P. R. Ahern and D. Sarason ; On some hypodirichlet algebras of analytic functions. Amer. J. Math. 89 (1967)
2. P. R. Ahern and D. Sarason ; The H^p spaces of a class of function algebras. Acta Math. 117 (1967)
3. R. Arens ; The maximal ideals of certain function algebras. Pac. J. Math. 8 (1958)
4. E. Bishop and K. de Leeuw ; The representation of linear functionals by measures on sets of extreme points. Ann. Inst. Fourier. 9 (1959)
5. E. Bishop ; The structure of certain measures. Duke Math. J. 25 (1958)
6. E. Bishop ; A minimal boundary for function algebras. Pac. J. Math. 9 (1959)
7. E. Bishop ; Boundary measures of analytic differentials, Duke Math. J. 27 (1960)
8. E. Bishop ; Representing measures for points in a uniform algebras. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964)
9. A. Browder ; Point derivations on function algebras. J. Funct. Anal. 1 (1967)

10. L. Carleson ; Mergelyan's theorem on uniform polynomial approximation. Math. Scand. 15 (1965)

11. T. Gamelin and G. Lumer ; The universal Hardy class. (to appear)

12. J. Garnett ; On a theorem of Mergelyan. Pac. J. Math. 26 (1968)

13. J. Garnett and I. Glicksberg ; Algebras with the same multiplicative measures. J. Funct. Anal. 1 (1967)

14. I. Glicksberg ; The abstract F. and M. Riesz theorem. J. Funct. analy 1 (1967)

15. I. Glicksberg ; Dominant representing measures and rational approximation. Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968)

16. I. Glicksberg and J. Wermer; Measures orthogonal to a Dirichlet algebras. Duke Math. J. 30 (1963)

17. S. N. Mergelyan ; Uniform approximation to functions of a complex variable. A. M. S. Translation No. 101.

18. L. Zalcman ; Analytic Capacity and rational approximation. Lecture Note in Math. Springer Verlag. Berlin. 1968.

19. J. Wermer ; Banach algebras and analytic functions. Advances in Math. I (1961)

20. J. Wermer ; Seminar über Funktionen – Algebren. Lecture Note in Math. Springer Verlag, Berlin, 1964.

21. D. Wilken ; Lebesgue measure for parts of R(X). Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967)

22. D. Wilken ; The support of representing measures for R(X). Pac. J. Math. 26 (1968)